Acta Sci. Math. 46 (1983), 99—113

n-Distributivgesetze

HORST GERSTMANN

0. Einführung und Überblick

András Huhn prägte 1971 den Begriff der n-Distributivität, der eine Verallgemeinerung des gewöhnlichen Distributivgesetzes in Verbänden darstellt [10]. Wir nennen hier einen Verband X *n-distributiv*, wenn für jedes $x \in X$ und jede n-elementige Teilmenge Y von X die Gleichung $x \wedge \bigvee Y = \bigvee \{x \wedge \bigvee M \mid M \overset{n}{\subseteqq} Y\}$ gilt. Dabei bedeutet $M \overset{n}{\subseteqq} Y$, daß M eine Teilmenge von Y mit weniger als n Elementen ist. Für $n=2$ ist dies das gewöhnliche Distributivgesetz.

Es ist klar, daß für einen distributiven Verband das Distributivgesetz nicht nur für zweielementige Mengen Y, sondern sogar für alle endlichen Mengen gilt. Wir werden zeigen, daß in n-distributiven Verbänden die n-Distributivitätsgleichung auch für alle endlichen Mengen Y gilt. So wie man die gewöhnliche Distributivität zur $\bigvee$-Distributivität verschärft, indem man die Distributivitätseigenschaft für alle Teilmengen Y von X verlangt, liegt es nun nahe, auf dieselbe Weise eine Verschärfung der n-Distributivität zu definieren, die sogenannte *unendliche n-Distributivität*. Die unendliche n-Distributivität ist gleichbedeutend zu den beiden Eigenschaften $\wedge$-Stetigkeit und n-Distributivität (in Analogie zu dem bekannten Sachverhalt für $n=2$).

So wie man aber auch die gewöhnliche ($\bigvee$-)Distributivität zur vollständigen Distributivität verschärft, läßt sich analog die (unendliche) n-Distributivität zur *vollständigen n-Distributivität* verschärfen.

Als Werte für n lassen wir alle natürlichen Zahlen größer oder gleich 2 und $\aleph_0$ zu. Für $n=2$ erhält man die gewöhnlichen Distributivgesetze, für $n=\aleph_0$ die $\wedge$-Stetigkeit und die Stetigkeit (im Sinne von D. SCOTT [12]), so daß die übrigen n-Distributivgesetze als „interpolierende" Eigenschaften zwischen $\bigvee$-Distributivität und $\wedge$-Stetigkeit bzw. vollständiger Distributivität und Stetigkeit angesehen werden

Eingegangen am 4. Oktober 1982.

können. Die Abschnitte 2, 3 und 4 dieser Arbeit sind in Anlehnung an Arbeiten von Marcel Erné [3], [6] entstanden. Es werden die n-Distributivgesetze in einem sehr allgemeinen Rahmen behandelt, nämlich für Mengen, auf denen lediglich ein Hüllenoperator definiert ist. Dieser Idee liegt die Erkenntnis zugrunde, daß die ($\bigvee$-, vollständige) Distributivität eines Verbandes eigentlich eine Homomorphieeigenschaft des Schnittoperators ist ([6], Seite 20). Nur die Anwendung der Distributivgesetze für die mengentheoretische Durchschnitts- und Vereinigungsbildung (die ja immer gelten, also keine besondere Eigenschaft des Verbandes darstellen) führt auf das bekannte Aussehen der Distributivgesetze für Verbände. Der Vorteil dieser so allgemeinen Behandlung der n-Distributivität besteht in folgendem: Man erhält zum einen Charakterisierungen für diejenigen Verbände (sogar allgemeiner: quasigeordenete Mengen), die eine (vollständig, unendlich) n-distributive Schnittvervollständigung oder Idealvervollständigung besitzen. (Unter anderem wurden die Fälle $n=2$ und $n=\aleph_0$ in [4], [6] behandelt.) Zum anderen ergeben sich durch die Wahl des Hüllenoperators als diejenige Abbildung, die jeder Teilmenge einer gegebenen Algebra die kleinste sie enthaltende Subalgebra zuordnet, Charakterisierungen für die (vollständige, unendliche) n-Distributivität des Verbandes der Subalgebren oder Kongruenzrelationen. Insbesondere ergibt sich hier ein Satz über die n-Distributivität, der zwei derartige Sätze von András Huhn betreffend abelsche Gruppen und idempotente Algebren umfaßt. Weiter stellt sich heraus, daß für den Verband der Subalgebren einer idempotenten Algebra die (unendliche) n-Distributivität und die vollständige n-Distributivität gleichwertige Eigenschaften sind. Die abelschen Gruppen mit vollständig n-distributivem Untergruppenverband sind genau diejenigen, die keine Elemente unendlicher Ordnung besitzen, und deren endlich erzeugte Untergruppen immer schon von weniger als n Elementen erzeugt werden (letzteres bedeutet, daß der Verband der Untergruppen n-distributiv ist). Dies gilt für alle $n<\aleph_0$; für $n=\aleph_0$ ist jeder Untergruppenverband vollständig n-distributiv (d. h. stetig). Insbesondere gilt: Der Untergruppenverband einer abelschen Gruppe ist genau dann vollständig distributiv, wenn jede nicht triviale, endlich erzeugte Untergruppe von Primzahlordnung ist.

Weitere Anwendungen der n-distributivgesetze für Hüllenoperatoren erhält man durch die Wahl des Hüllenoperators als Abschlußoperator in topologischen Räumen. So ergibt sich zum Beispiel, daß für den Verband der abgeschlossenen Teilmengen eines T_1-Raumes aus der unendlichen n-Distributivität die vollständige n-Distributivität volgt.

Für alternative Verallgemeinerungen der klassischen Distributivgesetze wird der Leser verwiesen auf die Arbeiten [1], [5].

In den Notationen lehnen wir uns an die in [6] benutzte an. Zum Beispiel wird bei vorgegebenem Hüllenoperator Γ auf der Menge X der *Abschnittoperator* mit $\downarrow$ bezeichnet, d. h. $\downarrow Y=\bigcup\{\Gamma y \mid y\in Y\}$ $(Y\subseteq X)$. Ist X eine quasigeordnete

Menge, so ist Δ der *Schnittoperator* und I der *Idealoperator* auf X, also $\Delta Y = \bigcap\{\downarrow y \mid Y \subseteqq \downarrow y\}$, $IY = \bigcup\{\Delta M \mid M \subseteqq_e Y\}$ für $Y \subseteqq X$, wobei $M \subseteqq_e Y$ bedeutet, daß M eine endliche Teilmenge der Menge Y ist. $\mathfrak{P}Y$ bezeichnet die Menge aller Teilmengen von Y, $\mathfrak{P}_n Y$ die Menge aller Teilmengen von Y mit weniger als n Elementen und $\mathfrak{P}_e Y$ die Menge aller endlichen Teilmengen von Y.

1. n-distributive Verbände

Sei n eine natürliche Zahl, $n \geqq 2$. Ein Verband X heißt *n-distributiv*, wenn für jedes $x \in X$ und jede n-elementige Menge $Y \subseteqq X$ die Gleichung (d_n) gilt.

$$(d_n) \qquad x \wedge \bigvee Y = \bigvee \{x \wedge \bigvee M \mid M \overset{n}{\subseteqq} Y\}.$$

Die 2-Distributivität ist die gewöhnliche Distributivität.

Satz 1.1. *Der Verband X ist genau dann n-distributiv, wenn für jede endliche Menge $Y \subseteqq_e X$ die Gleichung* (d_n) *gilt.*

Beweis. Ist X n-distributiv, so gilt (d_n) für jede höchstens n-elementige Teilmenge von X. Angenommen, (d_n) gilt für jede höchstens m-elementige Teilmenge, $m \geqq n$. Wir zeigen, daß dann (d_n) auch für alle $(m+1)$-elementigen Teilmengen Y von X gilt. Sei also $Y = Z \cup \{a, b\}$, $|Z| = m-1$. Setze $z = a \vee b$. Da die Menge $Y_1 = Z \cup \{z\}$ höchstens m Elemente hat, gilt $x \wedge \bigvee Y = x \wedge \bigvee Y_1 = \bigvee \{x \wedge \bigvee M \mid M \overset{n}{\subseteqq} Z\} \vee \bigvee \{x \wedge \bigvee (N \cup \{z\}) \mid N \overset{n-1}{\subseteqq} Z\}$. Sei $N \overset{n-1}{\subseteqq} Z$ fest gewählt. Setze $Y_2 = N \cup \{a, b\}$. Wegen $|Y_2| \leqq n \leqq m$ gilt $x \wedge \bigvee (N \cup \{z\}) = x \wedge \bigvee Y_2 = \bigvee \{x \wedge \bigvee M \mid M \overset{n}{\subseteqq} Y_2\}$. Also gilt $x \wedge \bigvee Y = \bigvee \{x \wedge \bigvee M \mid M \overset{n}{\subseteqq} Z\} \vee \bigvee \{\bigvee \{x \wedge \bigvee M \mid M \overset{n}{\subseteqq} N \cup \{a, b\}\} \mid N \overset{n-1}{\subseteqq} Z\} = \bigvee \{x \wedge \bigvee M \mid M \overset{n}{\subseteqq} Y\}$.

Aufgrund von 1.1 liegt es nahe, den Begriff der $\bigvee$-Distributivität zu verallgemeinern: Ein vollständiger Verband X heiße *unendlich n-distributiv*, wenn für jede Menge $Y \subseteqq X$ die Beziehung (d_n) gilt. Die unendliche 2-Distributivität ist die $\bigvee$-Distributivität. Hier ist es sinnvoll, auch $\aleph_0$ als Wert für n zuzulassen: Die unendliche $\aleph_0$-Distributivität ergibt den bekannten Begriff der $\wedge$-Stetigkeit (vgl. [2], Seite 15).

Offensichtlich gilt: Erfüllen $x \in X$ und $Y \subseteqq X$ die Gleichung (d_n), so erfüllen sie auch (d_m) für jedes $m \geqq n$. Insbesondere ist ein unendlich n-distributiver Verband auch $\wedge$-stetig. Wir erhalten sogar (als Verallgemeinerung des Satzes, daß ein vollständiger Verband genau dann $\bigvee$-distributiv ist, wenn er $\wedge$-stetig und distributiv ist):

Satz 1.2. *Ein vollständiger Verband X ist genau dann unendlich n-distributiv, wenn er n-distributiv und $\wedge$-stetig ist.*

Beweis. Ist X $\wedge$-stetig, so gilt für $x \in X$ und $Y \subseteq X$: $x \wedge \bigvee Y = \bigvee \{x \wedge \bigvee N \mid N \subseteq_e Y\}$. Wenn X n-distributiv ist, gilt für jede endliche Teilmenge N von Y: $x \wedge \bigvee N = \bigvee \{x \wedge \bigvee M \mid M \overset{n}{\subseteq} N\}$. Es folgt somit: $x \wedge \bigvee Y = \bigvee \{\bigvee \{x \wedge \bigvee M \mid M \overset{n}{\subseteq} N\} \mid N \subseteq_e Y\} = \bigvee \{x \wedge \bigvee M \mid M \overset{n}{\subseteq} Y\}$.

Ist also der Verband der Subalgebren oder der Verband der Kongruenzrelationen einer Algebra A n-distributiv, dann ist er sogar unendlich n-distributiv.

Satz 1.3. *Ein (vollständiger) Verband X ist genau dann (unendlich) n-distributiv, wenn für jedes endliche System $\mathscr{Y}$ endlicher (beliebiger) Teilmengen von X gilt:*

$$(\mathrm{D}_n) \qquad \bigwedge \{\bigvee Y \mid Y \in \mathscr{Y}\} = \bigvee \{\bigwedge \{\bigvee f(Y) \mid Y \in \mathscr{Y}\} \mid f \in \prod_{Y \in \mathscr{Y}} \mathfrak{P}_n Y\}.$$

Beweis. Es gelte $x \wedge \bigvee Y = \bigvee \{x \wedge \bigvee M \mid M \overset{n}{\subseteq} Y\}$ für alle $x \in X$ und alle $Y \subseteq X$ ($\subseteq_e X$). Sei $\mathscr{Y} = \{Y_1, \ldots, Y_k\}$ eine Menge von (endlichen) Teilmengen von X. Es wird mittels vollständiger Induktion gezeigt, daß für alle $r = 1, \ldots, k$ gilt: $y := \bigvee Y_1 \wedge \ldots \wedge \bigvee Y_k = \bigvee \{\bigvee M_1 \wedge \ldots \wedge \bigvee M_r \wedge \bigvee Y_{r+1} \wedge \ldots \wedge \bigvee Y_k \mid M_i \overset{n}{\subseteq} Y_i$ für $i = 1, \ldots, r\}$. (Für $r = k$ erhält man die Behauptung.) Für $r = 1$ setze $x := \bigvee Y_2 \wedge \ldots \wedge \bigvee Y_k$. Dann ist $y = x \wedge \bigvee Y_1 = \bigvee \{x \wedge \bigvee M_1 \mid M_1 \overset{n}{\subseteq} Y_1\} = \bigvee \{\bigvee M_1 \wedge \bigvee Y_2 \wedge \ldots \wedge \bigvee Y_k \mid M_1 \overset{n}{\subseteq} Y_1\}$. Nehmen wir nun an, die Behauptung gilt für r, $1 \leqq r < k$. Seien $M_1 \overset{n}{\subseteq} Y_1, \ldots, \ldots, M_r \overset{n}{\subseteq} Y_r$ gewählt. Mit $z := \bigvee M_1 \wedge \ldots \wedge \bigvee M_r \wedge \bigvee Y_{r+2} \wedge \ldots \wedge \bigvee Y_k$ folgt $\bigvee M_1 \wedge \ldots \wedge \bigvee M_r \wedge \bigvee Y_{r+1} \wedge \ldots \wedge \bigvee Y_k = z \wedge \bigvee Y_{r+1} = \bigvee \{z \wedge \bigvee M_{r+1} \mid M_{r+1} \overset{n}{\subseteq} Y_{r+1}\}$. Hieraus ergibt sich: $y = \bigvee \{\bigvee M_1 \wedge \ldots \wedge \bigvee M_r \wedge \bigvee M_{r+1} \wedge \bigvee Y_{r+2} \wedge \ldots \wedge \bigvee Y_k \mid M_i \overset{n}{\subseteq} Y_i$ für $i = 1, \ldots, r+1\}$. Damit ist der Induktionsbeweis beendet.

Es gelte umgekehrt (D_n) für jedes endliche System von (endlichen) Teilmengen von X. Seien $x \in X$ und $Y \subseteq X$ ($\subseteq_e X$) gewählt. Für $\mathscr{Y} = \{\{x\}, Y\}$ folgt $x \wedge \bigvee Y = \bigvee \{x\} \wedge \bigvee Y = \bigvee \{\bigvee \{x\} \wedge \bigvee M \mid M \overset{n}{\subseteq} Y\} = \bigvee \{x \wedge \bigvee M \mid M \overset{n}{\subseteq} Y\}$.

Wir nennen einen vollständigen Verband X *vollständig n-distributiv*, wenn die Gleichung (D_n) für jedes Mengensystem $\mathscr{Y} \subseteq \mathfrak{P} X$ erfüllt ist. Die vollständige 2-Distributivität ist der bekannte Begriff der vollständigen Distributivität. Vollständige $\aleph_0$-Distributivität ist dasselbe wie Stetigkeit (vgl. [8], Seite 58).

Es bietet sich noch die folgende Variante für einen n-Distributivitätsbegriff an: Ein vollständiger Verband X heiße *endlich n-distributiv*, wenn die Gleichung (D_n) für jedes Mengensystem $\mathscr{Y}$ bestehend aus endlichen Teilmengen von X gilt.

Erfüllt das Mengensystem $\mathfrak{Y}$ die Gleichung (D_n), so erfüllt $\mathfrak{Y}$ offensichtlich auch (D_m) für jedes $m \geqq n$. Insbesondere ist ein vollständig n-distributiver Verband auch stetig. In Analogie zu 1.2 gilt sogar:

Satz 1.4. *Ein vollständiger Verband ist genau dann vollständig n-distributiv, wenn er endlich n-distributiv und stetig ist.*

Beweis. Es ist noch zu zeigen, daß ein endlich n-distributiver und stetiger Verband X vollständig n-distributiv ist. Wenn X stetig ist, so gilt für ein beliebiges Mengensystem $\mathfrak{Y} \subseteqq \mathfrak{P}X$: $\bigwedge\{\bigvee Y \mid Y \in \mathfrak{Y}\} = \bigvee\{\bigwedge\{\bigvee f(Y) \mid Y \in \mathfrak{Y}\} \mid f \in \prod_{Y \in \mathfrak{Y}} \mathfrak{P}_e Y\}$. Wegen der endlichen n-Distributivität von X gilt für jedes $f \in \prod_{Y \in \mathfrak{Y}} \mathfrak{P}_e Y$: $\bigwedge\{\bigvee f(Y) \mid Y \in \mathfrak{Y}\} = \bigvee\{\bigwedge\{\bigvee g(f(Y)) \mid Y \in \mathfrak{Y}\} \mid g \in \prod_{Y \in \mathfrak{Y}} \mathfrak{P}_n f(Y)\}$. Es folgt somit: $\bigwedge\{\bigvee Y \mid Y \in \mathfrak{Y}\} = \bigvee\{\bigvee\{\bigwedge\{\bigvee g(f(Y)) \mid Y \in \mathfrak{Y}\} \mid g \in \prod_{Y \in \mathfrak{Y}} \mathfrak{P}_n f(Y)\} \mid f \in \prod_{Y \in \mathfrak{Y}} \mathfrak{P}_e Y\} = \bigvee\{\bigwedge\{\bigvee h(Y) \mid Y \in \mathfrak{Y}\} \mid h \in \prod_{Y \in \mathfrak{Y}} \mathfrak{P}_n Y\}$.

2. Charakterisierungen der n-Distributivgesetze durch Eigenschaften des Schnittoperators

Ist Γ ein Hüllenoperator auf der Menge X, so heißt der durch $\overset{n}{\downarrow} Y := \bigcup\{\Gamma M \mid M \overset{n}{\subseteqq} Y\}$ definierte Operator $\overset{n}{\downarrow}: \mathfrak{P}X \to \mathfrak{P}X$ *n-Abschnittoperator*. Die Bilder von $\overset{n}{\downarrow}$ heißen *n-Abschnitte*. Ist Γ der Schnittoperator einer quasigeordneten Menge X, so ist der Operator $\overset{n}{\downarrow}$ für $n=2$ der gewöhnliche Abschnittoperator und für $n=\aleph_0$ der Idealoperator. Für den (hier nicht vorkommenden) Fall $n > |X|$ erhält man den Schnittoperator. Ist X sogar ein Verband, so gilt $\overset{n}{\downarrow} Y = \downarrow\{\bigvee M \mid M \overset{n}{\subseteqq} X\}$.

Ist Γ ein Hüllenoperator auf der Menge X und ist $\mathfrak{X}$ eine Menge von n-Abschnitten bzgl. Γ, so sagen wir Γ *erhält den Durchschnitt* $\bigcap \mathfrak{X}$, wenn gilt: $\bigcap \Gamma[\mathfrak{X}] = \Gamma(\bigcap \mathfrak{X})$. (Hierbei kann „$=$“ durch „$\subseteqq$“ ersetzt werden.)

Satz 2.1. *Sei Δ der Schnittoperator auf dem (vollständigen) Verband X, und sei $\mathfrak{Y} \subseteqq \mathfrak{P}X$. Δ erhält genau dann den Durchschnitt $\bigcap\{\overset{n}{\downarrow} Y \mid Y \in \mathfrak{Y}\}$, wenn für $\mathfrak{Y}$ die Gleichung (D_n) gilt.*

Beweis. $\bigcap\{\Delta Y \mid Y \in \mathfrak{Y}\} = \bigcap\{\downarrow \bigvee Y \mid Y \in \mathfrak{Y}\} = \downarrow \bigwedge\{\bigvee Y \mid Y \in \mathfrak{Y}\}$. Andererseits gilt $\Delta(\bigcap\{\overset{n}{\downarrow} Y \mid Y \in \mathfrak{Y}\}) = \downarrow \bigvee(\bigcap\{\overset{n}{\downarrow} Y \mid Y \in \mathfrak{Y}\})$. Nun ist $\bigcap\{\overset{n}{\downarrow} Y \mid Y \in \mathfrak{Y}\} = \bigcap\{\bigcup\{\downarrow \bigvee M \mid M \overset{n}{\subseteqq} Y\} \mid Y \in \mathfrak{Y}\} = \bigcup\{\bigcap\{\downarrow \bigvee f(Y) \mid Y \in \mathfrak{Y}\} \mid f \in \prod_{Y \in \mathfrak{Y}} \mathfrak{P}_n Y\} = \bigcup\{\downarrow \bigwedge\{\bigvee f(Y) \mid Y \in \mathfrak{Y}\} \mid f \in \prod_{Y \in \mathfrak{Y}} \mathfrak{P}_n Y\} = \downarrow\{\bigwedge\{\bigvee f(Y) \mid Y \in \mathfrak{Y}\} \mid f \in \prod_{Y \in \mathfrak{Y}} \mathfrak{P}_n Y\}$. Hieraus ergibt sich die Behauptung.

Korollar 2.2. *Ein vollständiger Verband ist genau dann vollständig n-distributiv, wenn der Schnittoperator beliebige Durchschnitte von n-Abschnitten erhält.*

Ein vollständiger Verband ist genau dann unendlich n-distributiv, wenn der Schnittoperator endliche Durchschnitte von n-Abschnitten erhält.

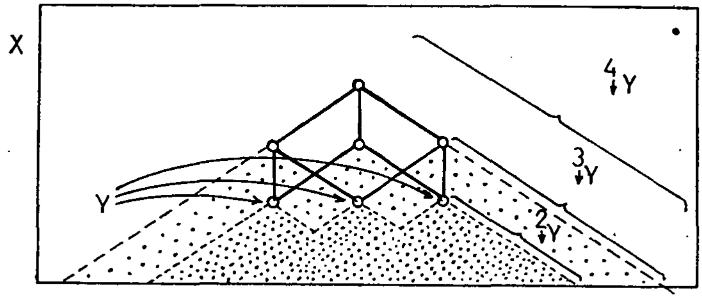
Ein vollständiger Verband ist genau dann endlich n-distributiv, wenn der Schnittoperator beliebige Durchschnitte von endlich erzeugten n-Abschnitten erhält.

Ein Verband ist genau dann n-distributiv, wenn der Schnittoperator endliche Durchschnitte von endlich erzeugten n-Abschnitten erhält.

Dabei heißt bei gegebener Abbildung Φ von X in X eine Menge $Z \subseteqq X$ *endlich erzeugt*, wenn Z das Bild einer endlichen Teilmenge von X unter Φ ist.

Wir stellen noch einige Eigenschaften des n-Abschnittoperators zusammen. Sei Γ ein Hüllenoperator auf der Menge X und sei $\overset{n}{\downarrow}$ der zu Γ gehörige n-Abschnittoperator. Wie leicht zu sehen ist, gelten für jede Teilmenge Y von X die Beziehungen $\Gamma Y = \overset{n}{\downarrow}\Gamma Y = \Gamma\overset{n}{\downarrow} Y$ und $\overset{m}{\downarrow} Y \subseteqq \overset{n}{\downarrow} Y$ für $m \leqq n$. Der Operator $\overset{n}{\downarrow}$ ist extensiv und monoton, aber für $2 < n < \aleph_0$ im allgemeinen nicht idempotent (also kein Hüllenoperator). Wenn jedoch für jede Menge $N \subseteqq X$ ein $x_N \in X$ mit $\Gamma x_N = \Gamma N$ existiert (was zum Beispiel für den Schnittoperator eines vollständigen Verbandes der Fall ist), so gilt $\overset{m}{\downarrow} \circ \overset{n}{\downarrow} = \overset{r}{\downarrow}$ mit $r = (n-1)(m-1)+1$ bzw. $r = \aleph_0$, wenn n oder m den Wert $\aleph_0$ hat.

Beweis. $\overset{m}{\downarrow}(\overset{n}{\downarrow} Y) = \bigcup\{\Gamma M \mid M \overset{m}{\subseteqq} \bigcup\{\Gamma N \mid N \overset{n}{\subseteqq} Y\}\} = \bigcup\{\Gamma M \mid M \overset{m}{\subseteqq} \bigcup\{\Gamma x_N \mid \cdot$ $\cdot \mid N \overset{n}{\subseteqq} Y\}\} \overset{(*)}{=} \bigcup\{\Gamma(\{x_N \mid N \in \mathcal{N}\}) \mid \mathcal{N} \overset{m}{\subseteqq} \mathfrak{P}_n Y\} \overset{(*)}{=} \bigcup\{\Gamma(\bigcup \mathcal{N}) \mid \mathcal{N} \overset{m}{\subseteqq} \mathfrak{P}_n Y\} = \bigcup\{\Gamma S \mid \cdot$ $\cdot \mid S \overset{r}{\subseteqq} Y\} = \overset{r}{\downarrow} Y$. Dabei geht an den mit $(*)$ gekennzeichneten Stellen die folgende Beziehung ein: Aus $K_i \subseteqq \Gamma L_i$ für jedes $i \in I$ folgt $\Gamma(\bigcup_{i \in I} K_i) \subseteqq \Gamma(\bigcup_{i \in I} L_i)$.



3. Die (unendliche) n-Distributivität

Die Ergebnisse des nächsten Satzes stammen größtenteils von Marcel Erné und sind grundlegend für die Charakterisierungen der n-Distributivität und der unendlichen n-Distributivität. Wir geben hier einen etwas anderen Beweis dafür, daß aus der Aussage (b) die Aussage (c) folgt. Der Vollständigkeit wegen werden hier die Beweise aus [6] für „aus (a) folgt (b)" und „aus (c) folgt (a)" mit aufgeführt.

Lemma 3.1. *Seien Γ ein Hüllenoperator und $\mathcal{M}$ ein Mengensystem auf der Menge X, so daß für alle $x \in X$ die Menge $\{x\}$ oder der Punktabschluß Γx ein Element von $\mathcal{M}$ ist. Die folgenden Aussagen* (a)—(c) *sind äquivalent.*

(a) *Für jedes $x \in X$ und alle $M \in \mathcal{M}$ mit $x \in \Gamma M$ gibt es eine Menge $N \subseteq {\downarrow} M$ mit $\Gamma N = {\downarrow} x$.*

(b) ${\downarrow} x \cap \Gamma M = \Gamma({\downarrow} x \cap {\downarrow} M)$ *für alle* $x \in X$, $M \in \mathcal{M}$.

(c) *Γ erhält endliche Durchschnitte von Mengen ${\downarrow} M$, $M \in \mathcal{M}$.*

Ist Γ ein algebraischer Hüllenoperator und ist $\mathcal{M}$ eine Menge von n-Abschnitten, die alle endlich erzeugten n-Abschnitte enthält, so ist (d) *zu* (a)—(c) *äquivalent.*

(d) *Für jedes $x \in X$ und alle $E \subseteq_e X$ mit $x \in \Gamma E$ gibt es eine Menge $N \subseteq_e \overset{n}{\downarrow} E$ mit $\Gamma N = {\downarrow} x$.*

Gilt $\Gamma x = \{x\}$ für alle $x \in X$, dann ist (e) *zu* (a)—(c) *äquivalent.*

(e) *Für alle $M \in \mathcal{M}$ ist $\Gamma M = {\downarrow} M$.*

Beweis. (a)$\to$(b): Seien $x \in X$, $M \in \mathcal{M}$ und $y \in {\downarrow} x \cap \Gamma M$. Dann gibt es eine Menge $N \subseteq {\downarrow} M$ mit $\Gamma N = {\downarrow} y$. Es folgt $N \subseteq \Gamma N = {\downarrow} y \subseteq {\downarrow} x$, also $N \subseteq {\downarrow} x \cap {\downarrow} M$, und damit $y \in \Gamma N \subseteq \Gamma({\downarrow} x \cap {\downarrow} M)$.

(b)$\to$(c): Sei $\mathcal{Y} \subseteq \{{\downarrow} M \mid M \in \mathcal{M}\}$. Ist $\mathcal{Y} = \emptyset$, so ist (c) erfüllt. Es sei nun $\mathcal{Y} = \{Y_1, \ldots, Y_k\}$, $k \geqq 1$. Es wird mittels vollständiger Induktion gezeigt, daß für $r = 1, \ldots, k$ gilt:

$$(*) \qquad \bigcap \Gamma[\mathcal{Y}] = \Gamma(Y_1 \cap \ldots \cap Y_r \cap \Gamma Y_{r+1} \cap \ldots \cap \Gamma Y_k).$$

Sei $x \in \bigcap \Gamma[\mathcal{Y}]$. Wegen ${\downarrow} x \subseteq \Gamma Y_2 \cap \ldots \cap \Gamma Y_k$ ist $x \in {\downarrow} x \cap \Gamma Y_1 = \Gamma({\downarrow} x \cap Y_1) \subseteq \Gamma(Y_1 \cap \cap \Gamma Y_2 \cap \ldots \cap \Gamma Y_k)$. Es gelte nun $(*)$ für ein r, $1 \leqq r < k$. Sei $x \in Y_1 \cap \ldots \cap Y_r \cap \cap \Gamma Y_{r+1} \cap \ldots \cap \Gamma Y_k$. Dann ist $x \in {\downarrow} x \cap \Gamma Y_{r+1} = \Gamma({\downarrow} x \cap Y_{r+1}) \subseteq \Gamma(Y_1 \cap \ldots \cap Y_{r+1} \cap \cap \Gamma Y_{r+2} \cap \ldots \cap \Gamma Y_k)$. Also gilt $\Gamma(Y_1 \cap \ldots \cap Y_r \cap \Gamma Y_{r+1} \cap \ldots \cap \Gamma Y_k) \subseteq \Gamma(Y_1 \cap \ldots \ldots \cap Y_{r+1} \cap \Gamma Y_{r+2} \cap \ldots \cap \Gamma Y_k)$. Damit ist der Induktionsbeweis beendet.

(c)$\to$(a): Seien $M \in \mathcal{M}$ und $x \in \Gamma M$. Es gilt ${\downarrow} x = {\downarrow} x \cap \Gamma M = \Gamma({\downarrow} x \cap {\downarrow} M) = \Gamma N$, wobei $N := {\downarrow} x \cap {\downarrow} M$ eine in ${\downarrow} M$ enthaltene Menge ist.

Zu (d): Ist Γ ein algebraischer Hüllenoperator und gilt $\{\overset{n}{\downarrow} E \mid E \subseteq_e X\} \subseteq \mathcal{M}$, so ist (a) zu der folgenden Bedingung äquivalent: $(*)$ Ist $x \in \Gamma E$, $E \subseteq_e X$, so ist $\Gamma K = {\downarrow} x$ für eine Menge $K \subseteq \overset{n}{\downarrow} E$. Denn einerseits muß $(*)$ gelten, da $\mathcal{M}$ alle endlich erzeugten n-Abschnitte enthält. Ist andererseits $M \in \mathcal{M}$, so ist $M = \overset{n}{\downarrow} S$ für eine Menge $S \subseteqq X$. Ist nun $x \in \Gamma M = \Gamma S$, so ist $x \in \Gamma E$ für eine Menge $E \subseteqq_e S$, da Γ algebraisch ist; aus $K \subseteqq \overset{n}{\downarrow} E$ folgt $K \subseteqq \overset{n}{\downarrow} S = M$. Wegen $\Gamma K = \bigcup \{\Gamma F \mid F \subseteqq_e K\}$ und $x \in \Gamma K$ gibt es eine Menge $N \subseteqq_e K$ mit $x \in \Gamma N$ und somit $\Gamma N = \downarrow x$.

Zu (e): Gilt (a) und ist $x \in \Gamma M$ für eine Menge $M \in \mathcal{M}$, so ist $\Gamma N = \Gamma x$ für eine Menge $N \subseteqq \downarrow M$. Aus $\Gamma x = \{x\}$ folgt $N = \{x\}$. Also ist $x \in \downarrow M$. Damit ist gezeigt: $\Gamma M = \downarrow M$. Gilt umgekehrt $\Gamma M = \downarrow M$ für alle $M \in \mathcal{M}$, so ist (b) offensichtlich erfüllt.

Satz 3.2. *Sei Γ ein Hüllenoperator auf der Menge X und sei $\mathfrak{X}$ das zu Γ gehörige Hüllensystem. Die folgenden Aussagen* (a)—(d) *sind äquivalent.*

(a) *Für jedes $x \in X$ und jede endliche Teilmenge Y von X mit $x \in \Gamma Y$ gibt es eine Menge $N \subseteqq \overset{n}{\downarrow} Y$ mit $\Gamma N = \downarrow x$.*

(b) $\downarrow x \cap \Gamma Y = \Gamma(\downarrow x \cap \overset{n}{\downarrow} Y)$ *für alle* $x \in X$, $Y \subseteqq_e X$.

(c) *Γ erhält endliche Durchschnitte von endlich erzeugten n-Abschnitten.*

(d) *Das n-Distributivgesetz* (d_n) *wird von allen Elementen von $\mathfrak{X}$ erfüllt, die endlich erzeugt sind (bzgl. Γ).*

Ist Γ ein algebraischer Hüllenoperator, so ist (e) *zu* (a)—(d) *äquivalent.*

(e) *Für jedes $x \in X$ und jede endliche Teilmenge Y von X mit $x \in \Gamma Y$ gibt es eine Menge $N \subseteqq_e \overset{n}{\downarrow} Y$ mit $\Gamma N = \downarrow x$.*

Enthält $\mathfrak{X}$ alle einelementigen Mengen, so ist (f) *zu* (a)—(d) *äquivalent.*

(f) *Für alle $Y \subseteqq_e X$ ist $\Gamma Y = \overset{n}{\downarrow} Y$.*

Beweis. Mit der Menge aller endlich erzeugten n-Abschnitte als Mengensystem $\mathcal{M}$ ergibt 3.1 die Äquivalenz von (a), (b) und (c) und, unter den angegebenen Voraussetzungen, auch die Äquivalenz von (e) bzw. (f) zu (a)—(c).

(c)→(d): Seien $Z \in \mathfrak{X}$ und $\mathcal{Y} = \{Y_1, \ldots, Y_n\} \subseteqq \mathfrak{X}$, $Z = \Gamma E$ und $Y_i = \Gamma M_i$ für Mengen $E \subseteqq_e X$, $M_i \subseteqq_e X$ $(i = 1, \ldots, n)$. Es ist $\bigvee \mathcal{Y} = \Gamma(\bigcup \mathcal{Y}) = \Gamma M$ mit $M = M_1 \cup \ldots \cup M_n$. Aufgrund von (c) gilt $Z \wedge \bigvee \mathcal{Y} = Z \cap \Gamma M = \Gamma(Z \cap \overset{n}{\downarrow} M)$. Nun gilt $Z \cap \overset{n}{\downarrow} M = Z \cap \bigcup \{\Gamma N \mid N \overset{n}{\subseteqq} M\} \subseteqq \bigcup \{Z \cap \Gamma N \mid N \overset{n}{\subseteqq} \bigcup \mathcal{Y}\} \subseteqq \bigcup \{Z \cap \Gamma(\bigcup \mathcal{Z}) \mid \mathcal{Z} \overset{n}{\subseteqq} \mathcal{Y}\}$. Es folgt $Z \wedge \bigvee \mathcal{Y} \subseteqq \bigvee \{Z \wedge \bigvee \mathcal{Z} \mid \mathcal{Z} \overset{n}{\subseteqq} \mathcal{Y}\}$.

(d)→(b): Seien $x \in X$ und $Y \subseteqq_e X$. Es gilt $\downarrow x \cap \Gamma Y = \Gamma x \cap \Gamma(\bigcup \{\Gamma y \mid y \in Y\}) = \Gamma x \wedge \bigvee \{\Gamma y \mid y \in Y\} = \bigvee \{\Gamma x \wedge \bigvee \{\Gamma y \mid y \in Z\} \mid Z \overset{n}{\subseteqq} Y\} = \Gamma(\bigcup \{\downarrow x \cap \Gamma Z \mid Z \overset{n}{\subseteqq} Y\}) = \Gamma(\downarrow x \cap \bigcup \{\Gamma Z \mid Z \overset{n}{\subseteqq} Y\}) = \Gamma(\downarrow x \cap \overset{n}{\downarrow} Y)$.

Satz 3.3. *Sei Γ ein Hüllenoperator auf der Menge X und sei $\mathfrak{X}$ das zu Γ gehörige Hüllensystem. Die folgenden Aussagen* (a)—(d) *sind äquivalent.*

(a) *Für jedes* $x \in X$ *und jede Teilmenge* Y *von* X *mit* $x \in \Gamma Y$ *gibt es eine Menge* $N \subseteq \overset{n}{\downarrow} Y$ *mit* $\Gamma N = \downarrow x$.

(b) $\downarrow x \cap \Gamma Y = \Gamma(\downarrow x \cap \overset{n}{\downarrow} Y)$ *für alle* $x \in X$, $Y \subseteq X$.

(c) Γ *erhält endliche Durchschnitte von n-Abschnitten.*

(d) $\mathfrak{X}$ *ist ein unendlich n-distributiver Verband.*

Ist Γ *ein algebraischer Hüllenoperator, so ist* (e) *zu* (a)—(d) *äquivalent.*

(e) *Für jedes* $x \in X$ *und jede endliche Teilmenge* Y *von* X *mit* $x \in \Gamma Y$ *gibt es eine Menge* $N \subseteq_e \overset{n}{\downarrow} Y$ *mit* $\Gamma N = \downarrow x$.

Enthält $\mathfrak{X}$ *alle einelementigen Mengen, so ist* (f) *zu* (a)—(d) *äquivalent.*

(f) $\Gamma = \overset{n}{\downarrow}$.

Beweis. Aus 3.1 erhält man die Äquivalenz von (a), (b) und (c) und, unter den angegebenen Zusatzvoraussetzungen, auch die Äquivalenz von (e) bzw. (f) zu (a)—(c), wenn man als Mengensystem $\mathcal{M}$ die Menge aller n-Abschnitte bzgl. Γ nimmt.

(c)→(d): Analog zum Beweis „(c)→(d)" von 3.2.

(d)→(b): Analog zum Beweis „(d)→(b)" von 3.2.

Wir wollen die Aussagen von 3.2 und 3.3 kurz für den Fall betrachten, daß Γ der Schnittoperator Δ eines (vollständigen) Verbandes X ist. Die Aussagen von 1.3 erhält man als Spezialfälle der Äquivalenz von (b) und (c) in 3.2 und 3.3 (wenn man die Charakterisierung der n-Distributivität von 1.1 voraussetzt). Die Äquivalenz von (a) und (b) in 3.2 ergibt für $n=2$ die lokale Charakterisierung der Distributivität von Grätzer ([9], Seite 99). Daß die Aussagen (b) und (d) in 3.3 äquivalent sind, bedeutet in diesem Fall, daß die unendliche n-Distributivität von X gleichbedeutend ist mit der unendlichen n-Distributivität der Schnittvervollständigung von X. Dies ist aber klar, da vollständige Verbände isomorph zu ihrer Schnittvervollständigung sind.

Die Äquivalenz von 3.3 (d) zu den anderen Bedingungen von 3.3 ist aber keineswegs für andere Hüllenoperatoren wertlos. Dies soll im folgenden verdeutlicht werden.

Aus einem Satz über Polynomidentitäten (siehe [2], Seite 68) folgt, daß ein Verband genau dann n-distributiv ist, wenn dies für seinen Idealverband zutrifft. Aus 3.3 erhalten wir ein allgemeineres Resultat, wenn wir für Γ den Idealoperator I wählen und beachten, daß der Operator I, auf endliche Mengen angewandt, mit dem Schnittoperator Δ übereinstimmt:

Korollar 3.4. *Für eine quasigeordnete Menge* X *sind äquivalent:*

(a) *Ist* $Y \subseteq X$ *und ist* $x \in \Delta Y$, *so existiert eine endliche Teilmenge von* $\overset{n}{\downarrow} Y$, *für die* x *kleinste obere Schranke ist.*

(b) *Für alle* $x\in X$ *und* $Y\subseteq X$ *gilt* $\downarrow x\cap IY=I(\downarrow x\cap\overset{n}{\downarrow}Y)$.

(c) *I erhält endliche Durchschnitte von n-Abschnitten.*

(d) *Der Idealverband von* X *ist (unendlich) n-distributiv.*

Bezeichnet Γ den Schnittoperator Δ eines Verbandes X, so charakterisieren die äquivalenten Bedingungen (a)—(d) von 3.2 die n-Distributivität von X. In diesem Fall müssen also 3.2 (a) und 3.4 (a) übereinstimmen. Es soll nun untersucht werden, für welche quasigeordneten Mengen X die Bedingungen 3.2 (a) (für $\Gamma=\Delta$) und 3.4 (a) sonst noch identisch sind: Im Gegensatz zu 3.2 (a) wird in 3.4 (a) zu vorgegebener Menge $Y\subseteq_e X$ und $x\in\Delta Y$ eine *endliche* Teilmenge N von $\overset{n}{\downarrow}Y$ mit $\Delta N=\downarrow x$ gefordert. Wie aus dem Beweis von 3.1 hervorgeht, kann in 3.2 (a) die Menge N als Durchschnitt eines Hauptabschnitts mit einem endlich erzeugten n-Abschnitt gewählt werden. Falls also X die Eigenschaft hat, daß im Durchschnitt $\downarrow x\cap\overset{n}{\downarrow}F$ eines Hauptabschnitts $\downarrow x$ mit einem endlich erzeugten n-Abschnitt $\overset{n}{\downarrow}F$ eine endliche Menge E enthalten ist mit $\Delta E=\Delta(\downarrow x\cap\overset{n}{\downarrow}F)$, so sind 3.2 (a) und 3.4 (a) äquivalent für X. Hier reicht es, diese Bedingung nur für alle (nicht leeren) Mengen F mit weniger als n Elementen zu fordern, denn für eine beliebige Teilmenge Z von X gilt $\downarrow x\cap\overset{n}{\downarrow}Z=\bigcup\{\downarrow x\cap\Delta F\mid F\overset{n}{\subseteq}Z\}$.

In einem Verband ist aber $\downarrow x\cap\overset{n}{\downarrow}F=\downarrow x\cap\Delta F=\downarrow x\cap\downarrow\bigvee F=\downarrow(x\wedge\bigvee F)$ für $\emptyset\neq F\subseteq X$. Als die geforderte Menge E kann man hier also $\{x\wedge\bigvee F\}$ nehmen. Im Fall $n=2$ kann man offensichtlich genauso schließen, wenn X lediglich ein $\wedge$-Halbverband ist ([6]). Daneben gilt die Äquivalenz von 3.2 (a) und 3.4 (a) natürlich auch für alle endlichen quasigeordneten Mengen.

Es sei noch bemerkt, daß die Bedingung 3.4 (a) für $n=2$ mit der von Katriňák [11] gegebenen Definition der Distributivität eines $\vee$-Halbverbandes übereinstimmt. Die von Katriňák bemerkte Tatsache, daß ein $\vee$-Halbverband genau dann distributiv ist, wenn dies für seinen Idealverband zutrifft, ist also ein Spezialfall von 3.4.

Die Äquivalenz der Bedingungen (d) und (e) von 3.3 ergibt insbesondere auch eine Charakterisierung für die (unendliche) n-Distributivität des Verbandes Su (A) der Subalgebren einer Algebra A. Wir stellen dieses Ergebnis noch einmal besonders heraus:

Korollar 3.5. *Sei* A *eine Algebra.* Su (A) *ist genau dann (unendlich) n-distributiv, wenn für jedes* $x\in X$ *und jede endliche Teilmenge* Y *von* X *mit* $x\in[Y]$ *eine Menge* $N\subseteq_e\overset{n}{\downarrow}Y$ *existiert mit* $[N]=[x]$.

Die Bedingung in 3.5 läßt sich auch so formulieren: Ist $x\in[Y]$, $Y\subseteq_e X$, so ist $x\in[N]$, wobei jedes der endlich vielen Elemente von N in $[x]$ und in einer Menge $[M]$, $M\overset{n}{\subseteq}Y$, liegt.

Ist A eine idempotente Algebra, so ist die n-Distributivität von Su(A) auch gleichwertig mit der Bedingung $\overset{n}{\downarrow}=\Gamma$ (siehe 3.3 (f)). Diese Charakterisierung der idempotenten Algebren mit n-distributivem Subalgebrenverband stammt von András Huhn.

Die abelschen Gruppen mit n-distributivem Untergruppenverband wurden von András Huhn wie folgt charakterisiert:

Sei G eine abelsche Gruppe. Su(G) *ist genau dann n-distributiv, wenn jede endlich erzeugte Untergruppe schon von weniger als n Elementen erzeugt wird.*

Beweis (mit Hilfe von 3.5). Angenommen, U ist eine endlich erzeugte Untergruppe von G, die nicht von weniger als n Elementen erzeugt wird. Wir können o.B.d.A. annehmen, daß U isomorph ist zu $\mathbf{Z}_{r_1}\times\ldots\times\mathbf{Z}_{r_n}$ mit Zahlen $r_i\in\mathbf{N}_0:=$ $:=\mathbf{N}\cup\{0\}$. Der größte gemeinsame Teiler von $r_1,\ldots,r_n$ ist ungleich 1, denn sonst ließe sich $\mathbf{Z}_{r_1}\times\ldots\times\mathbf{Z}_{r_n}$ in ein direktes Produkt mit weniger als n Faktoren verwandeln: Ist etwa $r_1\neq 0$ und $r_1=q_1\ldots q_k$ die Zerlegung von r_1 in Primpotenzen, so ist $\mathbf{Z}_{r_1}\cong\mathbf{Z}_{q_1}\times\ldots\times\mathbf{Z}_{q_k}$; wäre ggT$(r_1,\ldots,r_n)=1$, so könnte jeder Faktor $\mathbf{Z}_{q_j}$ mit einem Faktor $\mathbf{Z}_{r_i}$, $i\in\{2,\ldots,n\}$, vermöge $\mathbf{Z}_{r_i}\times\mathbf{Z}_{q_j}\cong\mathbf{Z}_{r_i\cdot q_j}$ verschmolzen werden. Nimmt man nun als Elemente von Y die den Vektoren $(1,0,\ldots,0),\ldots$, $\ldots,(0,\ldots,0,1)$ entsprechenden Elemente von U und für x das dem Vektor $(1,\ldots,1)$ entsprechende Element, so ist zwar $x\in[Y]$, aber $x\notin[\overset{n}{\downarrow}Y\cap[x]]$, denn in $\overset{n}{\downarrow}Y\cap[x]$ liegen nur Elemente von G, die Vektoren der Form $(k_1r_1,\ldots,k_1r_1),\ldots$, $\ldots,(k_nr_n,\ldots,k_nr_n)$ entsprechen (die j-te Komponente jeweils modulo r_j); wäre x die Summe solcher Elemente, so müßte eine Gleichung der Form $1=k_1r_1+\ldots+k_nr_n$ mit ganzen Zahlen $k_1,\ldots,k_n$ gelten, im Widerspruch dazu, daß $r_1,\ldots,r_n$ teilerfremd sind.

Andererseits gilt die Bedingung aus 3.5 für die n-Distributivität offensichtlich für alle Teilmengen Y von G mit weniger als n Elementen. Nehmen wir also an, daß die Bedingung aus 3.5 für alle $(m-1)$-elementigen Teilmengen von G erfüllt ist für ein $m\geqq n$. Es sei nun $Y=\{y_1,\ldots,y_m\}\subseteqq G$, $x\in[Y]$, o.B.d.A. $x=y_1+\ldots+y_m$. Vorausgesetzt, $[Y]$ wird schon von weniger als n Elementen erzeugt, dann gilt $[Y]\cong Z_{r_2}\times\ldots\times Z_{r_n}$ für gewisse Zahlen $r_2,\ldots,r_n\in\mathbf{N}_0$. Die Elemente von Y können also als $(n-1)$-komponentige Vektoren angesehen werden. Somit gibt es teilerfremde Zahlen $k_1,\ldots,k_m\in\mathbf{Z}$ mit $k_1y_1+\ldots+k_my_m=0$. Also gilt $x_j:=k_jx=$ $=k_jy_1+\ldots+k_jy_m=(k_j-k_1)y_1+\ldots+(k_j-k_m)y_m\in[Y_j]$ für $Y_j:=Y\setminus y_j$. Nach Induktionsvoraussetzung ist $x_j\in[\overset{n}{\downarrow}Y_j\cap[x_j]]\subseteqq[\overset{n}{\downarrow}Y\cap[x]]$. Da $k_1,\ldots,k_m$ teilerfremd sind, gibt es ganze Zahlen $t_1,\ldots,t_m$ mit $k_1t_1+\ldots+k_mt_m=1$. Es folgt: $x=(k_1t_1+\ldots$ $\ldots+k_mt_m)x=t_1x_1+\ldots+t_mx_m\in[\overset{n}{\downarrow}Y\cap[x]]$.

4. Die vollständige n-Distributivität

Satz 4.1. *Sei Γ ein Hüllenoperator auf der Menge X und sei $\mathfrak{X}$ das zu Γ gehörige Hüllensystem. Die folgenden Aussagen* (a)—(c) *sind äquivalent:*

(a) *Für jedes $x \in X$ gibt es eine Menge $N \subseteqq X$, so daß $\Gamma N = \downarrow x$ und $N \subseteqq \overset{n}{\downarrow} Y$ für alle $Y \subseteqq X$ mit $x \in \Gamma Y$ gilt.*

(b) *Γ erhält beliebige Durchschnitte von n-Abschnitten.*

(c) *$\mathfrak{X}$ ist ein vollständig n-distributiver Verband.*

Ist Γ ein algebraischer Hüllenoperator, so ist (d) *zu* (a)—(c) *äquivalent.*

(d) *Für jedes $x \in X$ gibt es eine Menge $N \subseteqq_e X$, so daß $\Gamma N = \downarrow x$ und $N \subseteqq_e \overset{n}{\downarrow} Y$ für alle $Y \subseteqq_e X$ mit $x \in \Gamma Y$ gilt.*

Enthält $\mathfrak{X}$ alle einelementigen Teilmengen, so ist (e) *zu* (a)—(c) *äquivalent.*

(e) $\Gamma = \overset{n}{\downarrow}$.

Beweis. (a)→(b): Sei $\mathscr{Y} \subseteqq \mathfrak{P}X$. Ist $x \in \bigcap \Gamma[\mathscr{Y}]$, so gilt $x \in \Gamma Y$ für jedes $Y \in \mathscr{Y}$. Nach Voraussetzung existiert eine Menge N mit $x \in \Gamma N$ und $N \subseteqq \overset{n}{\downarrow} Y$ für alle $Y \in \mathscr{Y}$. Also ist $N \subseteqq \bigcap \{\overset{n}{\downarrow} Y \mid Y \in \mathscr{Y}\}$, und somit gilt $x \in \Gamma N \subseteqq \Gamma(\bigcap \{\overset{n}{\downarrow} Y \mid Y \in \mathscr{Y}\})$.

(b)→(a): Sei $x \in X$. Setze $N = \bigcap \{\overset{n}{\downarrow} Y \mid x \in \Gamma Y\}$. Nach Voraussetzung ist $\Gamma N = \bigcap \{\Gamma Y \mid x \in \Gamma Y\}$. Also gilt $\Gamma N = \downarrow x$ und $N \subseteqq \overset{n}{\downarrow} Y$ für alle $Y \subseteqq X$ mit $x \in \Gamma Y$.

(b)→(c): Sei $\mathscr{S} \subseteqq \mathfrak{P}\mathfrak{X}$. Wegen (b) gilt $\bigwedge \{\bigvee \mathscr{X} \mid \mathscr{X} \in \mathscr{S}\} = \bigcap \{\Gamma(\bigcup \mathscr{X}) \mid \mathscr{X} \in \mathscr{S}\} = \Gamma(\bigcap \{\overset{n}{\downarrow}(\bigcup \mathscr{X}) \mid \mathscr{X} \in \mathscr{S}\})$. Es ist aber $\bigcap \{\overset{n}{\downarrow}(\bigcup \mathscr{X}) \mid \mathscr{X} \in \mathscr{S}\} = \bigcap \{\bigcup \{\Gamma M \mid M \overset{n}{\subseteqq} \bigcup \mathscr{X}\} \mid \mathscr{X} \in \mathscr{S}\} = \bigcup \{\bigcap \{\Gamma \psi(\mathscr{X}) \mid \mathscr{X} \in \mathscr{S}\} \mid \psi \in \prod_{\mathscr{X} \in \mathscr{S}} \mathfrak{P}_n(\bigcup \mathscr{X})\} \subseteqq \bigcup \{\bigcap \{\Gamma(\bigcup f(\mathscr{X})) \mid \mathscr{X} \in \mathscr{S}\} \mid f \in \prod_{\mathscr{X} \in \mathscr{S}} \mathfrak{P}_n \mathscr{X}\}$. Also folgt: $\bigwedge \{\bigvee \mathscr{X} \mid \mathscr{X} \in \mathscr{S}\} \subseteqq \bigvee \{\bigwedge \{\bigvee f(\mathscr{X}) \mid \mathscr{X} \in \mathscr{S}\} \mid f \in \prod_{\mathscr{X} \in \mathscr{S}} \mathfrak{P}_n \mathscr{X}\}$.

(c)→(b): Sei $\mathscr{Y} \subseteqq \mathfrak{P}X$. Es gilt $\bigcap \{\Gamma Y \mid Y \in \mathscr{Y}\} = \bigwedge \{\bigvee \{\Gamma y \mid y \in Y\} \mid Y \in \mathscr{Y}\} = \bigvee \{\bigwedge \{\bigvee \{\Gamma y \mid y \in f(Y)\} \mid Y \in \mathscr{Y}\} \mid f \in \prod_{Y \in \mathscr{Y}} \mathfrak{P}_n Y\} = \bigvee \{\bigwedge \{\Gamma f(Y) \mid Y \in \mathscr{Y}\} \mid f \in \prod_{Y \in \mathscr{Y}} \mathfrak{P}_n Y\} = \Gamma(\bigcup \{\bigcap \{\Gamma f(Y) \mid Y \in \mathscr{Y}\} \mid f \in \prod_{Y \in \mathscr{Y}} \mathfrak{P}_n Y\}) = \Gamma(\bigcap \{\bigcup \{\Gamma M \mid M \overset{n}{\subseteqq} Y\} \mid Y \in \mathscr{Y}\}) = \Gamma(\bigcap \{\overset{n}{\downarrow} Y \mid Y \in \mathscr{Y}\})$.

Zu (d): Ist Γ ein algebraischer Hüllenoperator, so kann man sich in der Bedingung (a) offensichtlich auf endliche Mengen beschränken. Die nach (a) existierende Menge N kann endlich gewählt werden, denn ist M eine beliebige Menge mit $\Gamma M = \downarrow x$, so gibt es eine endliche Teilmenge N von M mit $\Gamma N = \downarrow x$.

Zu (e): Gilt $\Gamma = \overset{n}{\downarrow}$, so ist (b) offensichtlich erfüllt. Umgekehrt folgt aber schon aus der unendlichen n-Distributivität, wenn $\mathfrak{X}$ alle einelementigen Teilmengen enthält: $\Gamma = \overset{n}{\downarrow}$.

Bezeichnet Γ den Schnittoperator oder den Idealoperator, so erhält man aus 4.1 eine Charakterisierung derjenigen quasigeordneten Mengen, deren Schnittvervollständigung bzw. Idealvervollständigung vollständig n-distributiv ist (insbesondere also stetig oder vollständig distributiv). Zum Beispiel ergibt sich für die Idealvervollständigung quasigeordneter Mengen:

Korollar 4.2. *Für eine quasigeordnete Menge* X *sind äquivalent:*

(a) *Für jedes* $x \in X$ *gibt es eine Menge* $N \subseteqq_e X$, *für die* x *kleinste obere Schranke ist und die in jeder Menge* $\overset{n}{\downarrow} Y$, $Y \subseteqq_e X$, *mit* $x \in \Delta Y$ *enthalten ist.*

(b) I *erhält beliebige Durchschnitte von* n*-Abschnitten.*

(c) *Der Idealverband von* X *ist vollständig* n*-distributiv.*

Nimmt man für Γ den Operator [ ], der jeder Teilmenge einer gegebenen Algebra A die kleinste sie enthaltende Subalgebra zuordnet, so ergibt sich aus 4.1:

Korollar 4.3. *Sei* A *eine Algebra.* Su(A) *ist genau dann vollständig* n*-distributiv, wenn für alle* $x \in A$ *eine Menge* $N \subseteqq_e A$ *existiert, so daß* $[N]=[x]$ *und* $N \subseteqq_e \overset{n}{\downarrow} Y$ *für alle* $Y \subseteqq_e X$ *mit* $x \in [Y]$ *gilt.*

Im Detail bedeutet die Bedingung in 4.3: Für alle $x \in A$ gibt es eine Menge $N \subseteqq_e A$ mit $[N]=[x]$ und jedes Element von N liegt in einer Menge $[M]$, $M \overset{n}{\subseteqq} Y$, wenn $x \in [Y]$ gilt.

Für idempotente Algebren gilt darüber hinaus (wegen (4) siehe [7]):

Satz 4.4. *Für eine idempotente Algebra* A *sind die folgenden vier Aussagen äquivalent:*

(1) Su(A) *ist villständig* n*-distributiv.*

(2) Su(A) *ist* n*-distributiv.*

(3) $[\ ]=\overset{n}{\downarrow}$.

(4) *Für alle* $Y \overset{n+s-1}{\subseteqq} A$ *gilt* $[Y]=\overset{n}{\downarrow} Y$, *wobei die Stelligkeit von jeder Operation von* A *nicht größer als* s *ist.*

Bei abelschen Gruppen sind jedoch die n-Distributivität und die vollständige n-Distributivität des Subalgebrenverbandes keine äquivalenten Eigenschaften:

Satz 4.5. *Sei* G *eine abelsche Gruppe.* Su(G) *ist genau dann vollständig* n*-distributiv* $(n<\aleph_0)$, *wenn* G *keine Elemente unendlicher Ordnung enthält und jede endlich erzeugte Untergruppe schon von weniger als* n *Elementen erzeugt wird (d. h. jede endlich erzeugte Untergruppe ist isomorph zu einem Produkt* $\mathbf{Z}_{k_1} \times \ldots \times \mathbf{Z}_{k_n}$ *für natürliche Zahlen* $k_1, \ldots, k_n \neq 0$).

Beweis. Nehmen wir an, G enthält ein Element x unendlicher Ordnung. Für jede Menge $P=\{p_1, \ldots, p_n\}$ von n verschiedenen Primzahlen sei $Y_P= =\{(\prod_{i \neq j} p_i)x \mid j=1, \ldots, n\}$. Offensichtlich gilt $\overset{n}{\downarrow} Y_P=[p_1 x] \cup \ldots \cup [p_n x]$.

Angenommen, die Menge $\bigcap\{\overset{n}{\downarrow} Y_P \mid P$ n-elementige Menge von Primzahlen$\}$ enthält ein Element $y \neq 0$. Wähle eine n-elementige Menge Q von Primzahlen. Wegen $y \in \overset{n}{\downarrow} Y_Q$ gilt $y=kqx$ für ein $q \in Q$, $k \in \mathbf{Z}$. Sei R eine Menge von n Primzahlen, die alle größer als $|kq|$ sind. Dann ist $y \notin \overset{n}{\downarrow} Y_R$, da x unendliche Ordnung hat, Widerspruch.

Hieraus folgt, daß die in 4.3 geforderte Menge N nicht existiert. $\mathrm{Su}(G)$ ist also nicht vollständig n-distributiv. Nehmen wir nun umgekehrt an, daß jede endlich erzeugte Untergruppe schon von weniger als n Elementen erzeugt wird und G keine Elemente unendlicher Ordnung enthält.

Sei $x \in G$. Sei P die Menge aller maximalen Primpotenzen, die $\operatorname{ord} x$ teilen. Wir setzen $N_x=\{(\operatorname{ord} x/p)x \mid p \in P\}$. Offensichtlich gilt $[N_x]=[x]$. Es wird nun gezeigt, daß $N_x \subseteqq_e \overset{n}{\downarrow} Y$ für alle $Y \subseteqq_e X$ mit $x \in [Y]$ gilt.

Hat Y weniger als n Elemente, so gilt $[Y]=\overset{n}{\downarrow} Y$. Wenn also in diesem Fall x ein Element von $[Y]$ ist, so ist $N_x \subseteqq_e \overset{n}{\downarrow} Y$. Angenommen, für jedes $x \in G$ und für alle $(m-1)$-elementigen Teilmengen Y von G mit $x \in [Y]$ gilt: $N_x \subseteqq_e \overset{n}{\downarrow} Y$ $(m \geqq n)$. Sei $Y=\{y_1, \ldots, y_m\} \subseteqq G$, $x \in [Y]$, o.B.d.A. $x=y_1+\ldots+y_m$. Die Elemente von Y können als $(n-1)$-komponentige Vektoren angesehen werden. Somit gibt es Zahlen $k_1, \ldots, k_m \in \mathbf{Z}$ mit größtem gemeinsamen Teiler 1 und $k_1 y_1+\ldots+k_m y_m=0$. Sei p ein Primpotenzteiler von $r:=\operatorname{ord} x$. Da $k_1, \ldots, k_m$ teilerfremd sind, gibt es ein $j \in \{1, \ldots, m\}$ mit $\operatorname{ggT}(k_j, p)=1$. Es ist $x_j:=k_j x=k_j y_1+\ldots+k_j y_m= =(k_j-k_1)y_1+\ldots+(k_j-k_m)y_m \in [Y_j]$ für $Y_j:=Y \setminus y_j$. Wegen $\operatorname{ord} x_j=r/\operatorname{ggT}(k_j, r)$ ist $(\operatorname{ord} x_j/p)x_j=(rs_j/p)x$ mit $s_j:=k_j/\operatorname{ggT}(k_j, r)$. Nach Induktionsvoraussetzung ist $(\operatorname{ord} x_j/p)x_j \in \overset{n}{\downarrow} Y_j \subseteqq \overset{n}{\downarrow} Y$. Wegen $\operatorname{ggT}(s_j, r)=1$ gibt es Zahlen $a, b \in \mathbf{Z}$ mit $ars_j/p=r/p+br$. Es folgt $(ars_j/p)x=(r/p)x \in \overset{n}{\downarrow} Y$.

Aus dieser Charakterisierung der abelschen Gruppen mit vollständig n-distributivem Untergruppenverband ergibt sich insbesondere, daß der Untergruppenverband von $\mathbf{Z}$ nicht vollständig distributiv (d. h. kein A-Verband) ist. Für den Fall $n=\aleph_0$ wird der vorangegangene Satz falsch: Für jede (endlich-stellige) Algebra A ist $\mathrm{Su}(A)$ algebraisch, also insbesondere stetig.

Daß die Bedingungen 3.3 (f) und 4.1 (e) gleich lauten, hat unter anderem noch die folgende Konsequenz: Ist der Verband der abgeschlossenen Mengen eines T_1-Raumes unendlich n-distributiv, so ist er schon vollständig n-distributiv. Insbesondere sind also für eine T_1-Topologie die $\bigwedge$-Distributivität und die vollständige Distributivität gleichwertige Eigenschaften.

Schlußbemerkung

Wir haben uns in dieser Arbeit zwar auf Werte von n beschränkt, die zwischen 2 und $\aleph_0$ liegen, es soll jedoch nicht unerwähnt bleiben, daß man auch für andere Kardinalzahlen sinnvolle Sätze erhalten kann. Zum Beispiel gilt: Ist X ein topologischer Raum, der das 1. Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, so ist der Verband der abgeschlossenen Mengen von X vollständig $\aleph_1$-distributiv. Dies gilt, weil in solch einem topologischen Raum jedes Element aus der topologischen Hülle einer Teilmenge schon Limes einer Folge von Elementen dieser Teilmenge ist, d. h. der topologische Hüllenoperator stimmt mit dem zugehörigen $\aleph_1$-Abschnittoperator überein (woraus sich die Gültigkeit von 4.1 (b) ergibt).

Der Autor ist Herrn Professor Erné für wertvolle Hinweise dankbar.

Literatur

[1] H.—J. Bandelt und M. Erné, Representations and embeddings of M-distributive lattices, *Houston J. Math.*, erscheint demnächst.

[2] P. Crawley und R. P. Dilworth, *Algebraic theory of lattices*, Prentice-Hall Inc. (Englewood Cliffs, N. J., 1973).

[3] M. Erné, *Verallgemeinerungen der Verbandstheorie. I—II*, Preprint und Habilitationsschrift, Hannover, 1979.

[4] M. Erné, *Scott convergence and Scott topology in partially ordered sets. II*, *Lecture Notes in Math.*, vol. 871, Springer-Verlag (Berlin, 1981); pp. 61—96.

[5] M. Erné, Homomorphisms of M-generated and M-distributive posets, Preprint, 1981.

[6] M. Erné, Distributivgesetze und Dedekind'sche Schnitte, *Festschrift der Braunschweig. Wiss. Ges. zum* **150**. *Geburststag R. Dedekinds*, erscheint demnächst.

[7] H. Gerstmann, Über die schwache Distributivität des Verbandes der Subalgebren idempotenter Algebren, Preprint, 1982.

[8] G. Gierz, K. H. Hofmann, K. Keimel, J. D. Lawson, M. Mislove, D. S. Scott, *A compendium of continuous lattices*, Springer-Verlag (Berlin, 1980).

[9] G. Grätzer, *General lattice theory*, Birkhäuser Verlag (Basel, 1978).

[10] A. Huhn, Schwach distributive Verbände, *Acta Fac. Rerum Natur. Univ. Comenian. Math., Mimoriadne Čislo*, **1971**, 51—56.

[11] T. Katriňák, Pseudokomplementäre Halbverbände, *Mat. časopis*, **18** (1968), 121—143.

[12] D. Scott, *Continuous lattices*, Lecture Notes in Math., vol. 274, Springer-Verlag (Berlin, 1972), pp. 97—136.

UNIVERSITÄT HANNOVER
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
3000 HANNOVER 1, FED. REP. OF GERMANY